УТВЕРЖДАЮ

Ректор Липецкого государственного педагогического университета профессор Бугаков П.Г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу Ивановой Елены Васильевны «Ограниченные решения векторно-операторных дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешённых относительно старшей производной», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Диссертация Ивановой Е.В. посвящена нелинейным дифференциальным уравнениям в нормированных пространствах. Рассматриваемые в диссертации дифференциальные уравнения являются векторно-операторными дифференциальными уравнениями n-го порядка, не разрешёнными относительно старшей производной. Она является продолжением и развитием исследований, подытоженных в книге А.И. Перова и И.Д. Коструб «Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка», изданной в 2013 году. В этой книге нелинейные дифференциальные уравнения изучаются в конечномерном банаховом (или гильбертовом) пространстве. По рассматриваемому нелинейному уравнению строится линейный дифференциальный оператор n-го порядка с постоянными коэффициентами (матрицами). По этому оператору введены интегральные постоянные $æ_0, æ_1, \ldots, æ_n$ и частотные постоянные $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Первые, грубо говоря, являются нормами некоторых интегральных операторов, а вторые – их спектральными радиусами. Однако в формулировках теорем принимают участие только интегральные постоянные $æ_0, æ_1, \ldots, æ_{n-1}$ или частотные постоянные $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, так как дифференциальные уравнения разрешимы относительно старшей производной. Дифференциальные уравнения изучаются либо в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, либо в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ произвольной размерности. Так как они не предполагаются разрешёнными относительно старшей производной, то в условия разрешимости нелинейных уравнений входят как интегральная постоянная $æ_n$, так и частотная постоянная σ_n.

В линейной части основное дифференциальное уравнение имеет вид

$$A_0 x^{(n)} + A_1 x^{(n-1)} + \cdots + A_n x = f(t), \qquad (1)$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_n$ – постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, т.е. $A_j \in End\ \mathbb{B}$ при j=0,1,…, n, причём оператор A_0 непрерывно обратим, $A_j^{-1} \in End\ \mathbb{B}$. Здесь векторная функция $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ либо является непрерывной и ограниченной, т.е. $f(t) \in C(\mathbb{B})$, либо измеримой и ограниченной, т.е. $f(t) \in L_\infty(\mathbb{B})$.

Вместе с уравнением (1) рассматривается операторный характеристический многочлен

$$L_n(\lambda) \equiv A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n : \mathbb{C} \to End\ \mathbb{B}.$$

Нерезонансное условие в диссертации означает, что

$$L_n^{-1}(i\theta) \equiv \llbracket (A \rrbracket_0 (i\theta)^n + A_1 (i\theta)^{n-1} + \cdots + A_n\big)^{-1} \in End\ \mathbb{B}. \qquad (2)$$

при $-\infty < \theta < +\infty$; в теории автоматического регулирования $W(\lambda) = L_n^{-1}(\lambda)$ называется передаточной функцией, а $H(i\theta) = L_n^{-1}(i\theta)$ - частотной характеристикой.

В нерезонансном случае вводятся частотные постоянные

$$\sigma_j = \max_{-\infty<\theta<+\infty} \|(i\theta)^j L_n^{-1}(i\theta)\|, \quad j = 0,1,\dots,n-1;$$
$$\sigma_n = \sup_{-\infty<\theta<+\infty} \|(i\theta)^n L_n^{-1}(i\theta)\|.$$

Если выполнено нерезонансное условие (2), то дифференциальное уравнение (1) при любой $f(t) \in L_\infty(\mathbb{B})$ имеет единственное решение $x(t) \in C(\mathbb{B})$, причём оно имеет ограниченные производные $\dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ и справедливы формулы

$$x^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(j)}(t-s) f(s) ds, j = 0,1,\dots,n-1,$$
$$x^{(n)}(t) = A_0^{-1} f(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(n)}(t-s) f(s) ds, \tag{3}$$

где $G(t): \mathbb{R} \to End\ \mathbb{B}$ есть операторная ограниченная функция Грина. Вводятся интегральные постоянные

$$\varkappa_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|G^{(j)}(t)\right\| dt, j = 0,1,\dots,n-1,$$
$$\varkappa_n = \|A_0^{-1}\| + \int_{-\infty}^{+\infty} \|G^{(n)}(t)\| dt.$$

Если интегральные операторы в (3) обозначить $K^{(j)}: x^{(j)} = K^{(j)} f$, то

$$\left\|K^{(j)}\right\| \le \varkappa_j, \qquad j = 0,1,\dots,n.$$

Отметим, что

$$\sigma_j \le \varkappa_j, \qquad j = 0,1,\dots,n,$$

причём для векторно-матричного дифференциального уравнения можно сказать более точно: $\sigma_0 \le \varkappa_0$ и $\sigma_j < \varkappa_j$ при $j = 0,1,\dots,n$.

В случае нелинейной теории

$$A_0 x^{(n)} + A_1 x^{(n-1)} + \dots + A_n x = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)}). \tag{4}$$

обычно предполагается, что $f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)}): \mathbb{R} \times \mathbb{B} \times \dots \times \mathbb{B}\ (n+1 \text{ раз}) \to \mathbb{B}$ либо удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t, x_0, x_1, \dots, x_n) - f(t, y_0, y_n, \dots, y_n)\| \le \sum_{j=0}^{n} l_j \left\|x_j - y_j\right\| \tag{5}$$

либо удовлетворяет условию типа Липшица

$$\|f(t, x_0, x_1, \dots, x_n)\| \le a + \sum_{j=0}^{n} l_j \|x_j\| \tag{6}$$

где $l_0, l_1, \dots, l_n$ - некоторые неотрицательные постоянные и $a \geq 0$. По переменной t нелинейная функция может быть как непрерывной, так и измеримой (в условиях Каратеодори).

Условие малости нелинейности, которое встречается в диссертации, записывается в виде интегрального условия

$$q_\varkappa \equiv \sum_{j=0}^{n} l_j \varkappa_j < 1$$

или в виде частотного условия

$$q_\sigma \equiv \sum_{j=0}^{n} l_j \sigma_j < 1$$

Там, где речь идёт о локальных теоремах, вместо (5) и (6) предполагается, что условия (5) и (6) выполнены при $\|x_0\| \le a_0$, $\|x_1\| \le a_1, \dots, \|x_n\| \le a_n$, где a_0, $a_1, \dots, a_n$ - некоторые положительные постоянные.

Основным методом в диссертации Ивановой Е.В. является метод интегральных уравнений. Для доказательства теорем существования и единственности ограниченного решения нелинейного уравнения n-го порядка (4) или только существования служит система нелинейных интегральных уравнений

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(j)}(t-s) f(s, x_0(s), x_1(s), \dots, x_n(s)) ds, j = 0,1, \dots, n-1,$$

$$x_n(t) = A_0^{-1} f(t, x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(n)}(t-s) f(s, x_0(s), x_1(s), \dots, x_n(s)) ds,$$

которая записывается в виде $x = F(x)$.

В доказательствах используются обобщённый принцип сжимающих отображений (А.И. Перов, 1964), сохраняющий основные черты классического принципа сжимающих отображений Банаха-Каччиополли, и теорема А.Н. Тихонова о неподвижной точке в локально выпуклом топологическом пространстве (1932). Дело в том, что нелинейный интегральный оператор F(x), действующий в банаховом пространстве $C^{(n)}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, не является компактным, но становится таковым, если рассмотреть банаховы пространства $C(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ и $C^{(n)}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ как локально выпуклые пространства с конечно-открытой топологией. При применении теоремы Тихонова основная трудность приходится на доказательство непрерывности нелинейного отображения F(x) в локально выпуклом пространстве $C^{(n)}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. В диссертации эта трудность с успехом преодолевается.

Принцип линейного включения состоит в том, что любое ограниченное решение нелинейного векторно-операторного уравнения (4) при ограничениях (Липшица (5) или типа Липшица (6)), можно интерпретировать как ограниченное решение линейного векторно-операторного уравнения следующего вида

$$A_0 x^{(n)} + A_1 x^{(n-1)} + \dots + A_n x = \sum_{j=0}^{n} B_j(t) x^{(j)}(t) + f(t),$$

где $B_j(t)$ - сильно измеримые ограниченные операторные функции $B_j(t): \mathbb{R} \to End\, \mathbb{H}$, $f(t)$ – измеримая векторная функция : $\mathbb{R} \to \mathbb{H}$.

$$|B_j(t)| \le l_j, j = 0,1, \dots, n; \ |f(t)| \le a.$$

Принцип линейного включения используется в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ со скалярным произведением $(,)$ и нормой $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Принцип линейного включения был предложен Б.Ф. Быловым и Д.М. Гробманом (1962). В диссертации Е.В. Ивановой дано дальнейшее развитие и обобщение этого принципа: во-первых, для уравнений n-го порядка в гильбертовом пространстве, во-вторых, для дифференциальных уравнений, не разрешённых относительно старшей производной; в-третьих, для дифференциальных уравнений в условиях Каратеодори.

Сделаем замечание по литературе: так, например, в источнике под номером 7 сказано, что эта книга выходит под редакцией Б.Ф. Былова, хотя это не так. В источнике номер 19 говорится, что книга вышла в Ленинграде, на самом деле в книге указано Москва-Ленинград. В источнике 55 приведена книга Дж. Сансоне, но не указан том. Укажем также незначительный недостаток. При переходе от линейного уравнения n-го порядка к линейному уравнению первого порядка применяется теорема Баскакова, в которой операторная функция для уравнения первого порядка предполагается непрерывной в операторной топологии. В диссертации этот результат использовали в условиях Каратеодори, то есть в условиях измеримости в сильной топологии. И подробно этот переход не обозначен.

В качестве пожелания отметим, что желательно наряду с оценкой $\sigma_0 \leq \varkappa_0$ получить оценки $\sigma_j < \varkappa_j, \quad j = 0,1,\ldots,n$, которые имеют место для векторно-матричных дифференциальных уравнений.

Диссертация Ивановой Е.В. представляет собой естественный раздел теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве в чётко ограниченных границах (ограниченные операторы, компактность, разрешённые и не разрешённые относительно старшей производной дифференциальные уравнения n-го порядка, условие Каратеодори, условие Липшица, условие типа Липшица и т.п.). Теоремы, как правило, формулируются по методам и направлениям исследования: теоремы существования и единственности ограниченного решения или только теоремы существования, включая оценки ограниченного решения и его производных вплоть до n-го порядка включительно; сходимость метода последовательных приближений и оценка погрешности в терминах производных до n-ой включительно; периодичность или почти периодичность ограниченного решения в зависимости от периодичности или почти периодичности нелинейности по t с включением групп частот почти периодического решения в группу частот нелинейности; асимптотическая устойчивость в целом ограниченного решения (конвергентность) или диссипативность дифференциального уравнения n-го порядка, если операторный характеристический многочлен (2) является гурвицевым.

Диссертация написана современным математическим языком и хорошо отредактирована. Основные результаты диссертации являются новыми и строго обоснованы методами теории дифференциальных уравнений в банаховом и гильбертовом пространствах, спектральной теории ограниченных операторов и теории векторных почти периодических функций со значениями в банаховом или гильбертовом пространствах. Доказываемые утверждения являются новыми и достоверными. Результаты диссертации, без сомнения, будут использоваться специалистами в области дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в восьми работах, причём две статьи в журналах из списка ВАК. Отметим апробацию результатов диссертации, которые излагались на международных конференциях (Донецк и Новосибирск). Автореферат достаточно полно отражает основное содержание диссертации. Результаты диссертации могут быть использованы при исследовании дифференциальных уравнений в Московском, Новосибирском, Воронежском и других университетах, в Белгородском государственном национальном исследовательском университете.

Диссертационная работа Ивановой Елены Васильевны «Ограниченные решения векторно-операторных дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешённых относительно старшей производной» является законченной научно-квалифицированной работой, содержащей решение ряда задач, имеющих существенное значение для теории дифференциальных уравнений. Работа удовлетворяет всем требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения учёных степеней», утверждённым Постановлением Правительства РФ, которые предъявляются к диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук, а ее автор Иванова Елена Васильевна заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв обсуждён на заседании кафедры математики Липецкого государственного педагогического университета 30 января 2015 года, протокол № 5.

Зав. кафедрой математики, д.ф.-м.н., профессор Калитвин А.С.